

**MANUAL DIDÁCTICO
PARA EL APRENDIZAJE
DE LAS FUNCIONES
VECTORIALES EN
GEOGEBRA**

**DIDACTIC MANUAL FOR
LEARNING VECTOR
FUNCTIONS IN GEOGEBRA**

Autor (es):

Tanelema, Jhonny

<https://orcid.org/0009-0009-8413-608X>

Largo, Lenin

<https://orcid.org/0009-0005-1671-3720>

Galarza, Lizbeth

<https://orcid.org/0009-0000-7512-1825>

*Universidad Nacional de Chimborazo,
Rio Bamba, Ecuador*



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO DE BARQUISIMETO
"Luis Beltrán Prieto Figueroa"
Venezuela

**Revista Nacional
Científica Estudiantil**

RENACIENTE

Proyectando el saber universitario estudiantil



ISSN: 2739-0349

Depósito Legal: LA201000032

*Órgano de divulgación científica
multidisciplinar arbitrada.
Para estudiantes de pregrado
(En formación universitaria)*



**MANUAL DIDÁCTICO
PARA EL APRENDIZAJE
DE LAS FUNCIONES
VECTORIALES EN
GEOGEBRA**

**DIDACTIC MANUAL
FOR LEARNING
VECTOR FUNCTIONS IN
GEOGEBRA**

Resumen

Este ensayo analiza la propuesta de un manual didáctico diseñado para facilitar el aprendizaje de funciones vectoriales en el plano R^2 y espacio R^3 , utilizando el software Geogebra. El manual se desarrolló en respuesta a las dificultades que enfrentan los estudiantes de sexto semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y Física al comprender estos conceptos abstractos. La dificultad se identificó a través de una prueba diagnóstica que evaluó la comprensión de los estudiantes en relación con estos temas, revelando áreas clave de confusión y falta de claridad. El manual realizado en Geogebra es una herramienta versátil que permite la visualización dinámica de vectores, curvas y superficies en el espacio, proporcionando una experiencia de aprendizaje interactiva. La metodología utilizada para la elaboración del manual fue el proyecto especial el cual permitió hacer un análisis crítico de las situaciones. Con el ensayo se detalla que la investigación realizada, contribuye al mejoramiento del aprendizaje de las funciones vectoriales mediante la creación de un manual didáctico basado en Geogebra.

Palabras clave: manual didáctico, aprendizaje, funciones vectoriales, geogebra

Abstract

This study aims to propose a didactic manual designed to facilitate the learning of vector functions in the plane R^2 and space R^3 , using the Geogebra software. The manual was developed in response to the difficulties faced by sixth-semester students of the Pedagogy of Experimental Sciences Mathematics and Physics degree in understanding these abstract concepts. The difficulty was identified through a diagnostic test that evaluated students' understanding of these topics, revealing key areas of confusion and lack of clarity. The manual developed in Geogebra is a versatile tool that allows dynamic visualization of vectors, curves, and surfaces in space, providing an interactive learning experience. The methodology used for the manual's development was the special project, which allowed for a critical analysis of the situations. This essay details that the research work contributes to the improvement of learning vector functions through the creation of a didactic manual based on Geogebra.

Keywords: didactic manual, learning, vector functions, geogebra

Introducción

La comprensión de las funciones vectoriales en el espacio euclidiano bidimensional R^2 y tridimensional R^3 representa un pilar fundamental en la formación de estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y la Física. A pesar de esto, es frecuente encontrar dificultades entre los alumnos al abordar este tema, especialmente en el contexto de los estudiantes de sexto semestre de la carrera antes mencionada. Esta problemática plantea un desafío significativo para los docentes, quienes se enfrentan a la tarea de encontrar estrategias efectivas para facilitar la comprensión de estas complejas nociones.

El presente ensayo se argumenta en el trabajo de investigación que abordó la problemática mediante el diseño y desarrollo de un manual didáctico para comprender las funciones vectoriales en R^2 y R^3 , utilizando como herramienta principal el software Geogebra. El manual se concibió con el objetivo de proporcionar a los estudiantes de sexto semestre de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y la Física una guía clara y estructurada que les permitiera abordar de manera más efectiva este tema. La necesidad del manual surge a partir de la identificación de las dificultades específicas que enfrentan los estudiantes al intentar comprender las funciones vectoriales. Estas dificultades pueden atribuirse, en parte, a la naturaleza abstracta de los conceptos involucrados, así como a la falta de recursos didácticos adecuados que faciliten su comprensión. En este sentido, se hace evidente la importancia de desarrollar materiales educativos que integren tecnologías, como el software Geogebra, con el fin de ofrecer una experiencia de aprendizaje más interactiva y visualmente estimulante.

El uso de Geogebra como herramienta principal en el diseño de este manual se justifica por su versatilidad y capacidad para representar de manera dinámica conceptos matemáticos complejos. Este software permite la visualización de vectores, curvas y superficies en el espacio, así como la manipulación interactiva de estos objetos, lo que resulta especialmente útil para comprender intuitivamente las propiedades y comportamientos de las funciones vectoriales. La investigación tuvo como objetivo diseñar un manual didáctico para el aprendizaje de funciones vectoriales en el plano R^2 y espacio R^3 , haciendo uso de Geogebra, se utilizó una metodología de investigación documental.

La metodología para la elaboración del manual didáctico sobre funciones vectoriales en Geogebra consistió en un proceso estructurado y sistemático. Inicialmente, se llevó a cabo una exhaustiva revisión de la literatura académica y recursos disponibles relacionados con el tema, incluyendo libros, artículos y materiales didácticos. Posteriormente, se analizó de forma crítica estos documentos para identificar los conceptos fundamentales y mejores prácticas en el aprendizaje de funciones vectoriales. La selección del contenido para el manual se centró en los conceptos esenciales y se integró ejemplos, ejercicios y actividades prácticas que faciliten la comprensión utilizando Geogebra. El trabajo se desarrolló en dos fases: la fase de investigación y diagnóstico, en la que se identificaron las necesidades y se definieron los objetivos específicos, y la fase de diseño y desarrollo, en la que se estructuró el manual como propuesta, incorporando los conceptos y recursos.

En resumen, el trabajo de investigación buscó contribuir al mejoramiento del aprendizaje de las funciones vectoriales, mediante la creación de un manual didáctico basado en el software Geogebra. Se espera que este recurso no solo facilite la comprensión de conceptos abstractos, sino que también promueva el desarrollo de competencias tecnológicas y el fortalecimiento del pensamiento matemático entre los estudiantes.

Desarrollo

Manual

Antes de empezar debemos tomar en cuenta que un manual es un conjunto de instrucciones por escrito que te dice cómo hacer algo o cómo usar un producto. Proporciona detalles paso a paso para que puedas realizar una tarea de manera adecuada y segura. Puede ser desde las instrucciones de uso de un electrodoméstico hasta las indicaciones para realizar una tarea específica en el trabajo. En resumen, es una guía por escrito que te ayuda a entender y llevar a cabo ciertas acciones.

Según Vargara, (2017), afirma que “un manual de procedimientos se encarga de describir de forma detallada, y enfatiza en cada paso de una determinada actividad, entonces, dicho documento adquiere mucha relevancia para las personas que pertenezcan a una organización” (p.

249). Entonces, tomando en cuenta se puede decir que un manual va a llevar en el un detalle de las actividades que se debe realizar para alguna actividad indeterminada sobre alguna materia.

Tambien, Asanza Molina et al, (2016), afirma que, un manual es una publicación que incluye los aspectos fundamentales de una materia. Se trata de una guía que ayuda a entender el funcionamiento de algo, o bien que educa a los lectores acerca de un tema de forma ordenada y concisa, (p. 5). Se debe tomar en cuenta que este tipo de publicación son una forma de aprendizaje mucho mejor, ya que con eso se puede guiar para poder tener un resultado eficaz en el aprendizaje.

Hay que tomar en cuenta que los manuales son de gran apoyo para el aprendizaje de varios temas, como es en el caso de las funciones vectoriales, las cuales mejorarán el conocimiento de los estudiantes mediante este material didáctico importante.

(GeoGebra, 2024):

...es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo en un solo motor. Además, ofrece una plataforma en línea con más de 1 millón de recursos gratuitos para el aula creados por nuestra comunidad multilingüe. Estos recursos se pueden compartir fácilmente a través de nuestra plataforma de colaboración GeoGebra Classroom donde se puede monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real. GeoGebra es una comunidad de millones de usuarios ubicados en casi todos los países. Se ha convertido en el proveedor líder de software de matemáticas dinámicas, apoyando la educación en Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM) y las innovaciones en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo. El motor matemático de GeoGebra impulsa cientos de sitios web educativos en todo el mundo de diferentes maneras, desde demostraciones simples hasta sistemas completos de evaluación en línea (p. 1).

Mientras que Martínez (2019), menciona que:

El programa GeoGebra fue ideado por Markus Hohenwarter en el marco de su trabajo de tesis de Maestría, presentada en el año 2002 en la Universidad de Salzburgo, Austria. Se esperaba lograr un programa que reuniera las virtudes de los programas de geometría dinámica, con las de los sistemas de cálculo simbólico. El creador de GeoGebra valoraba todos estos recursos para la enseñanza de la matemática, pero notaba que, para el común de los docentes, los programas de cálculo simbólico resultaban difíciles de aprender, dada la rigidez de su sintaxis, y que por esta razón evitaban su uso. Por otro lado, observaba que los docentes

valoraban de mejor manera los programas de geometría dinámica, ya que su interfaz facilitaba su utilización (p.104).

Tomando en cuenta todo lo mencionado, relacionar el software geogebra con la realización de trabajos en esta área ayuda en muchas vistas, es decir, que se puede observar desde 2D y 3D. Osorio (2023, p. 33) desglosa las distintas vistas que tiene este software, las cuales son:

Vista gráfica 2D: En esta vista se pueden realizar construcciones geométricas utilizando puntos, rectas, segmentos, polígonos, cónicas, etc. También se pueden realizar operaciones tales como intersección entre objetos, traslaciones, rotaciones, etc. Además, se pueden graficar funciones, curvas expresadas en forma implícita, regiones planas definidas mediante desigualdades, etc.

Vista algebraica: En esta vista se muestran las representaciones algebraicas y numéricas de los objetos representados en las otras vistas del programa.

Vista gráfica 3D: En esta vista se pueden representar, además de los objetos mencionados para la vista gráfica 2D, planos, esferas, conos, poliedros, funciones de dos variables.

Vista CAS (Cálculo Simbólico): Permite realizar cálculos en forma simbólica (derivadas, integrales, sistemas de ecuaciones, cálculo matricial, etc.).

Vista de Probabilidades y Estadística: Esta vista contiene representaciones de diversas funciones de distribución de probabilidad y permite calcular la probabilidad de las mismas en un determinado intervalo. También ofrece una calculadora que permite realizar test estadísticos.

Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . El concepto algebraico

Como bien sabe al hablar de \mathbb{R}^2 se está haciendo énfasis al trabajo en dos dimensiones, es decir; en un plano que tiene dos elementos que son x e y, las cuales es una manera fácil de graficar y calcular las distintas operaciones; entonces veamos su definición tomada de (Colley, 2013).

Un vector en \mathbb{R}^2 es sencillamente un par ordenado de números reales, Es decir un vector en \mathbb{R}^2 se escribe de la siguiente manera: (a_1, a_2) por ejemplo: $(1,2)$

Pero tomando en cuenta que para trabajar en un plano de dos dimensiones se puede representar en un par de ordenadas que son x e y, es decir (x, y)

A continuación, se presenta la definición de un vector en \mathbb{R}^3 , la cual indica que:

De igual manera similar, un vector en \mathbb{R}^3 es simplemente una tripleta ordenada de números reales, es decir; un vector \mathbb{R}^3 se describe como (a_1, a_2, a_3) por ejemplo: $(9,5,7)$

Al tomar en cuenta la definición en \mathbb{R}^3 también conocido como vectores en el espacio las cuales también se puede representar en coordenadas en función de x, y, z es decir que un vector en el espacio se representa (x, y, z) .

Funciones

Según Engler et al. (2019), afirma que:

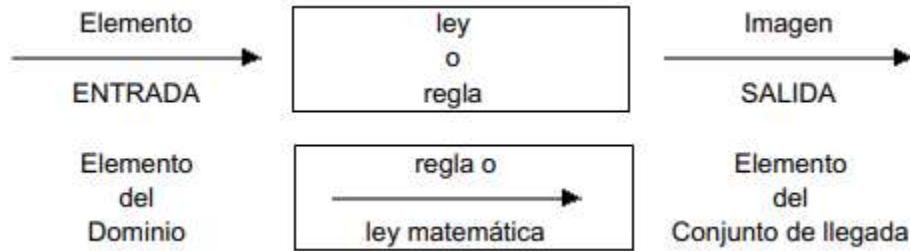
El concepto de función surge con fuerza en el campo de la ciencia y de la aplicación de la matemática al estudio y resolución de problemas concretos en biología, administración, economía y ciencias sociales. Su estudio constituye uno de los sustentos de la matemática actual. Se relaciona con la necesidad de considerar situaciones en las que distintas magnitudes variables están relacionadas entre sí, sabiendo que los valores que toman algunas de ellas dependen y están ligados a los valores de las demás (p.14).

Ahora bien, tomamos en cuenta la afirmación de los autores descritos para entender con precisión lo relacionado de las funciones vectoriales con estudios de la matemática, estas son muy importantes, pues ayudan en variadas circunstancias, por ello el Ministerio de Educación cf, afirma que “llamamos función a una relación o correspondencia entre dos conjuntos de elementos que varían, cambian, se modifican, en forma conjunta” (p. 17). Sean A y B dos conjuntos no vacíos, que llamamos dominio y conjunto de llegada respectivamente. Entendemos por función de A en B a toda regla que hace corresponder a cada elemento del dominio un único elemento del conjunto de llegada.

Se puede pensar que una función es un dispositivo de entrada-salida, proporciona un elemento (entrada) a una ley o regla matemática que la transforma en una imagen (salida). Una función es un tipo especial de relación que expresa cómo una cantidad (la salida) depende de otra (la entrada).

Figura 1

Representación de cómo trabaja una función

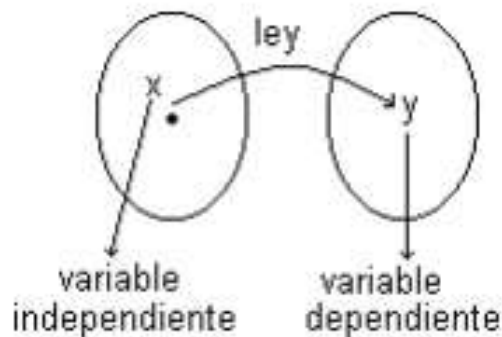


Nota. Extraído de “Funciones” (p. 16), por Engler et al. 2020. Universidad Nacional del litoral.

Si tenemos en cuenta esto podemos definir: *Dominio*, conjunto de todos los valores de entrada. *Conjunto de imágenes*, conjunto de todos los valores de salida. *Definición f* , es una función de A en B sí y sólo sí f es una correspondencia entre dos conjuntos A (dominio) y B (conjunto de llegada) tal que todo elemento de A tiene un único correspondiente en B. Decimos que y es la imagen de x por f y escribimos $y = f(x)$

Figura 2

Como operan las funciones



Nota. Extraído de “Funciones” (p. 17), por Engler et al, 2020, Universidad Nacional del litoral.

La variable que representa elementos de entrada para la función se llama *variable independiente*. La variable que representa elementos de salida recibe el nombre de *variable dependiente* pues su valor depende de la variable independiente. Como podemos observar tenemos que las funciones simplemente en forma resumida son como una maquina las cuales va a ingresar algo que es la variable independiente y va a salir algo como es la variable dependiente, entonces

debemos conocer todos estos conceptos para poder aplicar en un nuevo conocimiento para luego hablar sobre las funciones vectoriales.

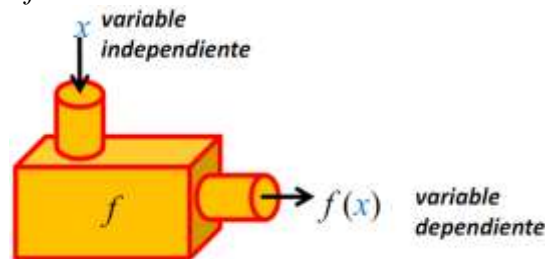
Funciones vectoriales

Hay que tomar en cuenta que existen personajes que juegan un papel fundamental en el desarrollo de la noción de vector y sobre todo la formalización del análisis vectorial dentro de las matemáticas, entre los pioneros se encuentra Hermann Günter Grassmann, los cuales introdujeron el principios como el cálculo vectorial-uso de los infinitesimales, que ya era conocido en la época de los griegos pero desarrollados por Newton y Leibniz en el siglo XVII en el estudio del cálculo integral. Los principios mencionados en el cálculo de variables y su enfoque apuntó al estudio en plano tridimensional relacionado con vectores haciéndolo más fácil de aplicar y aprender.

Entonces, se menciona sobre lo que son las funciones vectoriales según sea V un espacio vectorial normado sobre un cuerpo \mathbb{K} , entonces, a una función $\vec{r}(t)$ se le llama función vectorial definida sobre \mathbb{K} si a cada valor $t \in \mathbb{K}$ le corresponde un elemento de V . Ahora, esta definición se utilizará para desarrollar el particular caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o sea el conjunto de los números reales, y $V = \mathbb{R}^3$, que se conoce usualmente como el espacio vectorial euclídeo. De acuerdo con lo anterior, se tiene a la función vectorial definida sobre \mathbb{R} , que, por simplicidad, sólo se le llamará función vectorial, $\vec{r}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Este vector en coordenadas rectangulares es dado por tres números reales, que, en este caso, son tres funciones reales que dan cuenta del vector como $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ así que el vector es tridimensional. Si se ha escogido una base cartesiana $\sqrt{(x^2(t), y^2(t), z^2(t))}$ (Campo, 2021).

Figura 3

Simulación de como ocurren las funciones



Nota. Proceso que realiza las funciones

Geoméricamente una función vectorial $\vec{r}(t)$ es una trayectoria de un punto móvil en \mathbb{R}^n . Para cada valor del parámetro t obtenemos el vector de posición $\vec{r}(t)$ asociado al valor de t .

Continuidad: Para poder estudiar la continuidad veamos que nos menciona según Malakhaltsev & Arteaga Bejarano (2013).

Definición: Sea $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función vectorial tal que $\vec{r}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$

Entonces, $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow a} (f_1(t) \dots \dots, f_n(t)) = (\lim_{t \rightarrow a} f_1(t) \dots \dots \lim_{t \rightarrow a} f_n(t))$

Por tanto, el límite existe si y solo si todos los límites $\lim_{t \rightarrow a} f_i(t), i = 1, \dots, n$, Existe

Estructura del manual didáctico

La metodología de la estructura del manual didáctico se enfoca principalmente en resolver problemas de funciones vectoriales utilizando GeoGebra, se inicia con la definición de objetivos claros que establecen lo que se espera que el estudiante logre. Luego, se presenta el contenido teórico que proporciona la base conceptual necesaria, seguido de ejemplos prácticos que ayudan a entender mejor el contenido. El documento presenta una metodología práctica y tecnológica, específicamente una metodología basada en la experimentación interactiva. Se apoya en el uso de software, en este caso GeoGebra, para la visualización y resolución de problemas de funciones vectoriales. Finalmente, se ofrece retroalimentación con soluciones o respuestas, promoviendo la autoevaluación y mejora continua.

Dentro del manual que se realizó para el aprendizaje de funciones vectoriales, está compuesto en primer lugar de una caratula que será más llamativo para el estudio del tema mencionado, para luego empezar el estudio de funciones vectoriales mediante una explicación de pasos para que pueda guiarse el estudiante en este manual, en todos los pasos se encuentra una serie de imágenes las cuales ayudan a que el estudiante al momento de abrir GeoGebra pueda dirigirse al lugar correcto para el estudio de funciones vectoriales, también se encuentra unos links para que el estudiante puede acudir a una simulación de funciones las cuales al momento de poner otra función podrá observar el comportamiento de la función que requiere analizar.

Para una mejor comprensión de este manual se adjunta el código QR para visualizar el manual:

Figura 4

Ingreso al manual didáctico para el estudio de funciones vectoriales.



Nota. Código QR del manual

Figura

Portada del manual didáctico

5



Figura 6

Explicación de los pasos a seguir



Cierre

En conclusión, el manual didáctico diseñado para el aprendizaje de funciones vectoriales en los planos \mathbb{R}^2 y espacio \mathbb{R}^3 , con la ayuda de GeoGebra, proporciona a los estudiantes una herramienta efectiva y dinámica para comprender y aplicar conceptos fundamentales en geometría vectorial. La integración de GeoGebra permite una experiencia de aprendizaje interactiva y visualmente enriquecedora, capacitando a los estudiantes para experimentar y consolidar su comprensión de las funciones vectoriales en diversos contextos de cálculo integral.

La integración de GeoGebra como una plataforma de aprendizaje interactiva facilita a los estudiantes visualizar y manipular objetos vectoriales en tiempo real, lo que propicia una comprensión más profunda, más efectiva de los conceptos abstractos. Además, la inclusión de ejemplos prácticos y actividades guiadas ha proporcionado a los estudiantes oportunidades para aplicar y practicar lo aprendido, consolidando así su comprensión y habilidades en el tema.

Este manual no solo busca transmitir conocimientos, sino también fomentar habilidades cognitivas y competencias prácticas que son esenciales en el estudio y aplicación de las funciones vectoriales. Al capacitar a los estudiantes para interactuar de manera activa con los conceptos, desarrollar habilidades de resolución de problemas y promover un pensamiento crítico y creativo, se está preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos en campos diversos que requieren un entendimiento sólido de las funciones vectoriales.

Referencias

- Malakhaltsev, M., & Arteaga Bejarano, J. R. (2013). Cálculo Vectorial . En M. Malakhaltsev, & J. R. Arteaga Bejarano, *Cálculo Vectorial* (Págs. 27-29). Bogotá: Cengage Learning.
- Asanza Molina, M. I., Miranda Torres, M. M., Ortiz Zambrano, R. M., & Espín Martínez, J. A. (2016). Manual De Procedimiento En La Empresa. *Revista Caribeña De Ciencias Sociales*, 1-15.
- Campo, T. D. (2021). *Funciones Vectoriales, Su Diferenciabilidad Y Aplicaciones En La Física*. Universidad Pedagógica Nacional .
- Colley, S. J. (2013). Calculo Vectorial Cuarta Edición . En S. J. Colley, *Calculo Vectorial Cuarta Edición* (Págs. 1-2). México: Pearson.



- Engler, A., Muller , D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2019). Funciones . En *Funciones* (Pág. 14). Santa Fe : Unl.
- Geogebra, O. (2024). *Geogebra*. Geogebra: <https://www.geogebra.org/about?lang=es>
- Martínez, J. L. (Septiembre De 2019). El Geogebra: Una Herramienta Tecnológica Para Aprender Matemática En La Secundaria Básica Haciendo Matemática. *Revista Pedagógica De La Universidad De Cienfuegos*, 15(70), 103-108.
- Ministro De Educación, C. Y. (Cf). Nivel Secundario Para Adultos. En C. Y. Ministro De Educación, *Módulos De Enseñanza Semipresencial* (Págs. 17-18). Buenos Aires : Isbn.
- Osorio, A. I. (2023). “Diseño De Superficies Mediante Geogebra En El Desarrollo De Material Didáctico Para El Curso De Cálculo Ii En La Universidad Peruana De Ciencias Aplicadas - 2021”. *Trabajo De Suficiencia Profesional Para Optar El Título Profesional De Licenciado En Matemática*. Universidad Nacional De Callao, Callao, Perú.
- Vargara, M. E. (Abril-Agosto De 2017). Los Manuales De Procedimientos Como Herramientas De Control Interno De Una Organización. *Revista Científica De La Universidad De Cienfuegos*, 9(3), 247-252.